Санкт-Петербургский государственный университет

ПРИЕЗЖЕВ Петр Андреевич

Выпускная квалификационная работа

Вероятностное отслеживание для убывающих погрешностей с постоянной скоростью

Уровень образования:
Направление *01.03.01 «Математика»*
Основная образовательная программа *СВ.5000.2017 «Математика»*

Научный руководитель:
Профессор факультета МКН,
Доктор физико-математических наук,
Сергей Борисович Тихомиров

Рецензент:
Доцент кафедры теории вероятностей и
математической статистики СПбГУ,
Доктор физико-математических наук,
Сергей Геннадьевич Крыжевич

Санкт-Петербург
2021

1 Постановка задачи.

Пусть $\Sigma = \{0,1\}^{\mathbb{Z}}$. Наделим Σ стандартной вероятностной мерой ν и следующей метрикой

$$\operatorname{dist}(\{\omega^i\}, \{\tilde{\omega}^i\}) = \frac{1}{2^k}, \quad \textit{где } k = \min\{|i| : \omega^i \neq \tilde{\omega}^i\}.$$

Для последовательности $\omega = \{\omega^i\} \in \Sigma$ обозначим за $t(\omega)$ 0-ой элемент последовательсти: $t(\omega) = \omega^0$. Определим "сдвиг" как

$$(\sigma(\omega))^i = \omega^{i+1}.$$

Рассмотрим пространство $Q = \Sigma \times \mathbb{R}$. Наделим Q мерой произведения $\mu = \nu \times \text{Leb}$ и метрикой:

$$\operatorname{dist}((\omega, x), (\tilde{\omega}, \tilde{x})) = \max(\operatorname{dist}(\omega, \tilde{\omega}), \operatorname{dist}(x, \tilde{x})).$$

Для $q \in Q$ и $a > 0$ обозначим за $B(a, q)$ открытый шар радиуса a с центром в q.

Зафиксируем $\lambda_0, \lambda_1 \in \mathbb{R}$, удовлетворяющие следующим свойствам:

$$0 < \lambda_0 < 1 < \lambda_1, \quad \lambda_0\lambda_1 > 1. \tag{1}$$

Рассмотрим отображение $f\colon Q \to Q$, определённое следующим образом:

$$f(\omega, x) = (\sigma(\omega), \lambda_{t(\omega)} x).$$

Определение 1. Для интервала $I = (a, b) \cap \mathbb{Z}$, где $a \in \mathbb{Z} \cup \{-\infty\}, b \in \mathbb{Z} \cup \{+\infty\}$ последовательность точек $\{y_k\}_{k \in I}$ называется d_k-псевдотраекторией, если выполнены следующие неравенства:

$$\operatorname{dist}(y_{k+1}, f(y_k)) < d_{k+1}, \;\; k \in \mathbb{Z}, \;\; k, k+1 \in \mathrm{I}.$$

Определение 2. Отображение f обладает свойством отслеживания, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $d > 0$ такое, что для любой d-псевдотраектрории $\{y_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ существует траектория $\{x_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ такая, что

$$\operatorname{dist}(x_k, y_k) < \varepsilon, \;\; k \in \mathbb{Z}. \tag{2}$$

Определение 3. Пусть даны отображение f, убывающие положительные последовательности $\{d_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ и $\{\varepsilon_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Мы говорим, что d_n-псевдотраектория $\{y_n\}$ является ε_n-отслеживаемой, если выполнены следующие неравенства:

$$\operatorname{dist}(x_k, y_k) < \varepsilon_k, \;\; k \in \mathbb{Z}$$

для некоторой траектории $\{x_k\}$.

Определение 4. Отображение f обладает свойством Липшицева отслеживания, если существуют константы ε_0, $L_0 > 0$ такие, что для любого $\varepsilon < \varepsilon_0$ и d-псевдотраектории $\{y_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ с $d = \varepsilon / L_0$ существует траектория $\{x_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ такая, что неравенство 2 выполнено.

Заметим, что определения 1, 2, 4 являются классическими определениями теории отслеживания [1]. Определение 3 является более специальным.

В работе Приезжева Василия [2] была даказана следующая лемма:

Лемма 1. *Если* $\alpha_1 e^{\theta_1} \le \frac{d_k}{d_{k+1}}$, *где* $\alpha_1 e^{\theta_1} \ge 2$ *или* $\alpha_1 e^{\theta_1} \le \frac{d_k}{d_{k+1}} \le \alpha_2 e^{\theta_2}$, *где* $1 \le \alpha_1 e^{\theta_1} \le \alpha_2 e^{\theta_2} \le 2$, *то* d_n- *псевдотраектория сдвига Бернулли является* d_n- *отслеживаемой.*

Для $q \in Q, N \in \mathbb{N}$, последовательности $\{d_n\}$, такой что $d_n > 0$, обозначим за $\Omega_{q,d_n,N}$ множество d_n-псевдотраекторий длины N, начинающихся в $q_0 = q$. Если мы рассматриваем q_{k+1} как случайную точку в $B(d_{k+1}, f(q_k))$, выбранную равномерно по отношению к мере μ, то $\Omega_{q,d_n,N}$ образует конечную Марковскую цепь. Это наделяет $\Omega_{q,d_n,N}$ вероятностной мерой P.

Для последовательности $\{\varepsilon_n\}$, такой что $\varepsilon_n > 0$, обозначим за $p(q, d_n, N, \varepsilon_n)$ вероятность того, что псевдотраектория из $\Omega_{q,d_n,N}$ является ε_n- отслеживаемой. Заметим, что это событие измеримо, так как оно образует открытое подмножество в $\Omega_{q,d_n,N}$.

Лемма 2. *Пусть* $q = (\omega, x), \tilde{q} = (\omega, 0)$. *Тогда для последовательностей* $\{d_n\}, \{\varepsilon_n\}$, *таких что* $d_n, \varepsilon_n > 0$, *выполнено следующее:*

$$p(q, d_n, N, \varepsilon_n) = p(\tilde{q}, d_n, N, \varepsilon_n).$$

Доказательство. Рассмотрим $\{q_k = (\omega_k, x_k)\} \in \Omega_{q,d_n,N}$. Положим

$$r_k \ := \ x_{k+1} \ - \ \lambda_{t(\omega_k)} \ x_k.$$

Рассмотрим последовательность $\{\tilde{q}_k = (\omega_k, \tilde{x}_k)\}$, где

$$\tilde{x}_0 = 0, \quad \tilde{x}_{k+1} = \lambda_{t(\omega_k)} \tilde{x}_k + r_k.$$

Тогда выполнено следующее:

1. Соответствие $\{q_k\} \leftrightarrow \{\tilde{q}_k\}$ между пространствами $\Omega_{q,d_n,N}$ и $\Omega_{(\omega,0),d_n,N}$ взаимооднозначно и сохраняет меру.

2. Для любой последовательности $\{\varepsilon_n\}$ d_n- псевдотраектория ε_n-отслеживаема траекторией точки (ω, x) тогда и только тогда, когда $\{\tilde{q}_k\}$ ε_n-отслеживаема траекторией точки $(\omega, x - x_0)$.

Эти предложения завершают доказательство леммы. $\square$

Для $N \in \mathbb{N}$, последовательностей $\{d_n\}, \{\varepsilon_n\}$, таких что $d_n, \varepsilon_n > 0$, определим

$$p(d_n, N, \varepsilon_n) = \int_{\omega \in \Sigma} p((\omega, 0), d_n, N, \varepsilon_n) d\nu.$$

Заметим, что интеграл существует, так как для фиксированных $\{d_n\}, \{\varepsilon_n\}, N$ значение $p((\omega, 0), d_n, N, \varepsilon_n)$ зависит только от конечного числа вхождений ω. При этом $p(d_n, N, \varepsilon_n)$ может быть интерпретировано как вероятность того, что d_n-псевдотраектория длины N является ε_n-отслеживаемой.

В работе Сергея Борисовича Тихомирова [3] была доказана следующая теорема:

Теорема 1 (С.Б.Тихомиров). *Для любых $\lambda_0, \lambda_1 \in \mathbb{R}$, удовлетворяющих соотношению (1), существуют $\varepsilon_0 > 0$, $0 < c_0 < \infty$ такие, что для любого $\varepsilon < \varepsilon_0$, выполняется:*

1. *если $c < c_0$, то $\lim_{N\to\infty} p(\varepsilon/N^c, N, \varepsilon) = 0$;*
2. *если $c > c_0$, то $\lim_{N\to\infty} p(\varepsilon/N^c, N, \varepsilon) = 1$.*

Пусть теперь дана последовательность $\{d_n\}$, удовлетворяющая одному из следующих двух условий:

Условие 1.

$$\{d_n\} \text{не возрастает, } \forall \varepsilon > 0\ \exists \alpha\ \forall M\ \forall k : \frac{d_k}{d_{k+M}} < \alpha e^{\varepsilon M} \text{ и } \frac{d_k}{d_{k+1}} \leq 2.$$

Условие 2.

$$\exists \theta_1, \theta_2, \alpha_1, \alpha_2 : 0 < \theta_1 \leq \theta_2 < -\ln \lambda_0,\ \forall M\ \forall k : \alpha_1 e^{\theta_1 M} \leq \frac{d_k}{d_{k+M}} \leq \alpha_2 e^{\theta_2 M}.$$

При этом верно одно из двух: либо $\alpha_1 e^{\theta_1} \geq 2$, либо $1 \leq \alpha_1 e^{\theta_1} \leq \alpha_2 e^{\theta_2} \leq 2$,

Пример 1. Примером последовательности, удовлетворяющей условию 1 является последовательность $d_n = \frac{1}{n^\gamma}$, где $\gamma > 0$.

$$\frac{d_k}{d_{k+M}} = \frac{(k+M)^\gamma}{k^\gamma} \leq \frac{(2kM)^\gamma}{k^\gamma} = 2^\gamma M^\gamma.$$

Для $\forall \varepsilon\ \exists \alpha : 2^\gamma M^\gamma < \alpha e^{\varepsilon M}$.

Пример 2. Примером последовательности, удовлетворяющей условию 2 является: $d_0 = a$, где $a > 0$, $d_{k+1} = \frac{1}{e^{\theta_k}} d_k$, где $\theta_1 \leq \theta_k \leq \theta_2$ и $\theta_2 < -\ln \lambda_0$.

$$\frac{d_k}{d_{k+M}} = e^{\theta_{k+1} + \ldots + \theta_M}.$$

$$e^{\theta_1 M} \leq e^{\theta_{k+1} + \ldots + \theta_M} \leq e^{\theta_2 M}.$$

В данной работе мы докажем следующие две теоремы:

Теорема 2. *Для любых $\lambda_0, \lambda_1 \in \mathbb{R}$, удовлетворяющих соотношению (1), и любой последовательности $\{d_n\}$, удовлетворяющей условию 1, существуют $\varepsilon_0 > 0$, $0 < c_0 < \infty$ такие, что для всех $L > 0$, где $Ld_n < \varepsilon_0$ для всех $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ выполнено:*

1. *если $c < c_0$, то $\lim p(Ld_n/N^c, N, Ld_n) = 0$;*
2. *если $c > c_0$, то $\lim p(Ld_n/N^c, N, Ld_n) = 1$;*

Теорема 3. *Для любых $\lambda_0, \lambda_1 \in \mathbb{R}$, удовлетворяющих соотношению (1), и любой последовательности $\{d_n\}$, удовлетворяющей условию 2, существуют $\varepsilon_0 > 0$, $0 < c' \leq c'' < \infty$, такие, что для всех $L > 0$, где $Ld_n < \varepsilon_0$ для всех $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ выполнено:*

1. *если $c < c'$, то $\lim p(Ld_n/N^c, N, Ld_n) = 0$;*
2. *если $c > c''$, то $\lim p(Ld_n/N^c, N, Ld_n) = 1$;*

2 Эквивалентная формулировка.

Пусть $a_0 = \ln \lambda_0$, $a_1 = \ln \lambda_1$.

Рассмотрим следующее распределение:

$$\gamma = \begin{cases} a_0, & \text{с вероятностью } 1/2 \\ a_1, & \text{с вероятностью } 1/2 \end{cases}$$

Зафиксирум $N > 0$. Рассмотрим случайное блуждание $\{A_i\}_{i\in[0,\infty)}$, порождённое γ и независимые равномерно распределённые на отрезке $[-1;1]$ величины $\{r_i\}_{i\in[0,\infty)}$. Определим последовательность $\{z_i\}_{i\in[0,\infty)}$ следующим образом:

$$z_0 = 0, \quad z_{i+1} = z_i + \frac{r_{i+1} \cdot d_{i+1}}{e^{A_{i+1}}}. \tag{3}$$

Для данных $(\{A_i\}_{i\in[0,N)}, \{r_i\}_{i\in[0,N)})$ определим:

$$B(k,n) := \frac{e^{A_n + A_k}|z_n - z_k|}{d_n e^{A_k} + d_k e^{A_n}}, \quad 0 \leq k < n \leq N,$$

$$K(\{A_i\}, \{r_i\}) := \max_{0\leq k<n\leq N} B(k,n),$$

$$s(N, L) := P(K(\{A_i\}_{i\in[0,N]}, \{r_i\}_{i\in[0,N]}) < L).$$

Лемма 3. *Существуют $\varepsilon_0 > 0$, $L_0 > 0$ такие, что, если последовательность $\{d_n\}$ удовлетворяет либо условию 1, либо условию 2, $L > L_0$, $N \in \mathbb{N}$, $Ld_n < \varepsilon_0$ $\forall n \in \mathbb{N}$, то выполнено следующее равенство:*

$$p(d_n, N, Ld_n) = s(N, L).$$

Доказательство. Выберем $\varepsilon_0, L_0 > 0$ такие, что, если $\operatorname{dist}(\omega, \tilde{\omega}) < \varepsilon_0$, то $t(\omega) = t(\tilde{\omega})$ и, если $\{d_n\}$ удовлетворяет либо условию 1, либо условию 2, то при отображении σ для любой d_n-псевдотраектории при $L > L_0$, $Ld_n < \varepsilon_0$ существует траектория, которая Ld_n-отслеживает данную псевдотраекторию.

Зафиксируем последовательность $\{d_n\}$, $N \in \mathbb{N}$, $L > L_0$, такие, что $Ld_n < \varepsilon_0$ и d_n удовлетворяет либо условию 1, либо условию 2.

Выберем ω произвольным образом по отношению к мере ν и псевдотраекторию $\{q_k\} = \{(\omega_k, x_k)\} \in \Omega_{(\omega,0),d_n,N}$ по отношению к мере P.

Введём последовательности:

$$\gamma_k = a_{t(\omega_k)}, \quad A_k = \sum_{i=0}^{k-1} \gamma_i, \quad r_k = (x_k - \lambda_{t(\omega_{k-1})} x_{k-1})/d_k.$$

Заметим, что все r_k независимы и одинаково распределены в $[-1, 1]$ и γ_k независимы и одинаково распределены в соответствии с γ.

Докажем, что $\{q_k\}$ является Ld_n-отслеживаемой тогда и только тогда, когда выполняется:

$$L \geq K(\{A_i\}, \{r_i\}). \tag{4}$$

Предположим, что псевдотраектория (ω_k, x_k) Ld_n-отслеживаема траекторией (ξ_k, y_k). По выбору ε_0 верно:

$$t(\omega_k) = t(\xi_k). \tag{5}$$

Заметим, что

$$y_{k+1} = \lambda_{t(\xi_k)} y_k = e^{\gamma_k} y_k, \quad y_n = e^{A_n - A_k} y_k, \tag{6}$$

$$x_n = e^{A_n - A_k} x_k + e^{A_n}(z_n - z_k),$$

где z_k определены по (3). Следовательно,

$$y_n - x_n = e^{A_n - A_k}(y_k - x_k) - e^{A_n}(z_n - z_k)$$

.

Домножим обе части на $\frac{e^{A_k}}{d_n e^{A_k} + d_k e^{A_n}}$

Тогда получится:

$$\frac{e^{A_n + A_k}(z_n - z_k)}{d_n e^{A_k} + d_k e^{A_n}} = \frac{d_k e^{A_n}}{d_k e^{A_n} + d_n e^{A_k}} \frac{y_k - x_k}{d_k} - \frac{d_n e^{A_k}}{d_k e^{A_n} + d_n e^{A_k}} \frac{y_n - x_n}{d_n}$$

Из этого равенства легко видеть, что

$$\max\left(\frac{|y_k - x_k|}{d_k}, \frac{|y_n - x_n|}{d_n}\right) \geq B(k, n),$$

и равенство достигается, если $\frac{y_k - x_k}{d_k} = -\frac{y_n - x_n}{d_n}$. Следовательно, неравенство (4) выполняется.

Теперь предположим, что (4) выполняется. Докажем, что тогда (ω_k, x_k) может быть Ld_n-отслеживаема. Выберем траекторию ξ_k, которая Ld_n - отслеживает $\{\omega_k\}$. Тогда равенство (5) выполняется.

Для $y_0 \in \mathbb{R}$ определим y_k по соотношению (6) и зададим функцию $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ следующим образом

$$F(y_0) = \max_{0 \leq k \leq N} \frac{|y_k - x_k|}{d_k}.$$

Так как функция F непрерывна, то она достигает минимума для некоторй точки y_0. Обозначим $L' := \min_{y_0 \in \mathbb{R}} F(y_0)$ и пусть y_0 такая точка, что $L' = F(y_0)$. Пусть $D = \{k \in [0, N] : \frac{|y_k - x_k|}{d_k} = F(y_0)\}$. Тогда возможны следующие два случая:

Случай 1.

Для всех $k \in D$ значения $\frac{y_k - x_k}{d_k}$ имеют один и тот же знак. Без потери общности, мы считаем, что все эти значения положительные. Тогда для достаточно маленького $\delta > 0$ неравенство $F(y_0 - \delta) < F(y_0)$ выполняется, что противоречит выбору y_0.

Случай 2.

Существуют $k, n \in D$ такие, что значения $\frac{y_k - x_k}{d_k}$ и $\frac{y_n - x_n}{d_n}$ имеют противоположные знаки. Тогда $\frac{y_k - x_k}{d_k} = -\frac{y_n - x_n}{d_n}$ и, следовательно, $L' = B(k, n) \leq K(\{A_i\}, \{z_i\})$. $\square$

3 Доказательство теорем.

Обозначим $v := E(\gamma) = (a_0 + a_1)/2 > 0$ и $\omega := v/2$.

Мы будем пользоваться следующими двумя фактами:

Лемма 4. *(Large Deviation Principle, [4, Section 3]).*

Существует возрастающая функция $h : (0; \infty) \to (0; \infty)$ такая, что для любых $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$ и для достаточно большого n, выполняются следующие неравенства:

$P(\frac{A_n}{n} - E(\gamma) < -\varepsilon) < e^{-(h(\varepsilon) - \delta)n}$,

$P(\frac{A_n}{n} - E(\gamma) < -\varepsilon) > e^{-(h(\varepsilon) + \delta)n}$.

Лемма 5. *(Ruin Problem, [5, Chapter XII, §4,5]).*

Пусть b единственный положительный корень уравнения:

$$\frac{1}{2}(e^{-ba_0} + e^{-ba_1}) = 1.$$

Тогда для любых $\delta > 0$ и для достаточно больших $C > 0$, выполняются следующие неравенства:

$$P(\exists i \geq 0 : A_i \leq -C) \leq e^{-C(b - \delta)},$$

$$P(\exists i \geq 0 : A_i \leq -C) \geq e^{-C(b + \delta)}.$$

Согласно лемме 3 для доказательства теорем 2 и 3 достаточно доказать следующие теоремы:

Теорема 4. *Пусть последовательность $\{d_k\}$ не возрастает. Тогда*

(S2) Если $c > \frac{1}{b}$, то $\lim_{N \to \infty} s(N, N^c) = 1$.

Если $\{d_k\}$ удовлетворяет условию 1, то выполнено:

(S1) Если $c < \frac{1}{b}$, то $\lim_{N \to \infty} s(N, N^c) = 0$.

Теорема 5. *Пусть $\{d_k\}$ удовлетворяет условию 2.*

Пусть $a_0 + \theta_2 < 0$.

Пусть b'— единственный положительный корень уравнения

$$\frac{1}{2}(e^{-b'(a_0+\theta_2)} + e^{-b'(a_1+\theta_2)}) = 1$$

Пусть b''— единственный положительный корень уравнения

$$\frac{1}{2}(e^{-b''(a_0+\theta_1)} + e^{-b''(a_1+\theta_1)}) = 1$$

Тогда:

(S1') Если $c < 1/b'$, то $\lim_{N\to\infty} s(N, N^c) = 0$

(S2') Если $c > 1/b''$, то $\lim_{N\to\infty} s(N, N^c) = 1$

Доказательство. (Доказательство (S1))

Возьмём число $q > \max(\frac{2}{b\omega}, \frac{2}{h(\omega)})$. Положим $M = q \ln N$. Предположим, что $c < \frac{1}{b}$. Выберем $c_1 \in (c, \frac{1}{b})$ и $\delta > 0$, такие, что

$$c_1(b+\delta) < 1, \quad q > \frac{2}{(b-\delta)\omega} \tag{7}$$

Рассмотрим следующие события:

$$I = \{\exists i \in [0, M] : A_i \le -c_1 \ln N; \text{ и } A_{2M} \ge 0\}$$

$$I_1 = \{\exists i \in [0, M] : A_i \le -c_1 \ln N\}$$

$$I_2 = \{\exists i \in [0, M] : A_i \le -\omega M\}$$

$$I_3 = \{A_{2M} - A_M \le \omega M\}$$

Предложение 1. Верно следующее:

$$I_1 \subset I \cup I_2 \cup I_3.$$

Доказательство. Пусть совершилось событие I_1. Предположим, что события I и I_3 не совершились. Тогда

$$A_{2M} < 0 \text{ и } A_{2M} - A_M > \omega M.$$

Откуда

$$A_M < -\omega M.$$

Следовательно, совершилось событие I_2. □

Из предложения 1 следует, что

$$P(I) \geq P(I_1) - P(I_2) - P(I_3). \tag{8}$$

Оценим вероятности событий I_1, I_2, I_3 :

Используя Ruin Problem и Large deviation principle, получим:

$$\begin{aligned} P(I_1) &\geq P(\exists i \geq 0 : A_i \leq -c_1 \ln N) - P(\exists i > M : A_i \leq -c_1 \ln N) \geq \\ &\geq e^{-c_1 \ln N(b+\delta)} - \sum_{i=M+1}^{\infty} P(A_i \leq 0) \quad \geq N^{-c_1(b+\delta)} - \sum_{i=M+1}^{\infty} e^{-ih(v)} \\ &\geq N^{-c_1(b+\delta)} - \frac{1}{1-e^{-h(v)}} e^{-(M+1)h(v)} \geq N^{-c_1(b+\delta)} + o(N^{-2}). \end{aligned} \tag{9}$$

Из Ruin problem получаем:

$$P(I_2) \leq P(\exists i \geq 0 : A_i \leq -\omega M) \leq e^{-M\omega(b-\delta)} \leq N^{-\omega(b-\delta)q} = o(N^{-2}), \tag{10}$$

Из Large deviation principle следует:

$$P(I_3) \leq e^{-M(h(\omega)-\delta)} = N^{-(h(\omega)-\delta)q} = o(N^{-2}) \tag{11}$$

Из неравенств (8)- (11) получается:

$$P(I) \geq N^{-c_1(b+\delta)} + o(N^{-2}) \tag{12}$$

Теперь предположим, что событие I совершилось и пусть $i \in [0, M]$ номер одного из индексов, удовлетворяющих неравенству: $A_i < -c_1 \ln N$. Заметим, что из соотношения (3) следует, что следующие события независимы:

$$J_1 = \{r_i \in [1/2; 1]\}, \qquad J_2 = \{z_{2M} - z_0 \geq \frac{r_i d_i}{e^{A_i}}\}.$$

Следовательно,

$$P(z_{2M} - z_0 \geq \frac{d_i}{2e^{A_i}}) \geq P(J_1)P(J_2) = 1/4 \cdot 1/2 = 1/8.$$

Т.к. $B(0; 2M) = \frac{e^{A_{2M}}|z_{2M} - z_0|}{d_{2M} + e^{A_{2M}}}$ и при достаточно больших M выполняется неравенство $\frac{e^{A_{2M}}}{d_{2M}+e^{A_{2M}}} \geq \frac{1}{2}$, то

$$\begin{aligned} P\left(B(0; 2M) > \frac{d_M N^{c_1}}{4}\right) &\geq P\left(B(0; 2M) > \frac{d_i N^{c_1}}{4}\right) \\ &\geq \frac{1}{8} P(I) = \frac{1}{8} N^{-c_1(b+\delta)} + o(N^{-2}). \end{aligned}$$

Заметим, что для достаточно больших N выполняется: $N^c < \frac{d_M N^{c_1}}{4}$, и следовательно:

$$P(B(0,2M) > N^c) \geq \frac{1}{8} N^{-c_1(b+\delta)} + o(N^{-2}).$$

Покажем теперь, что для любого $k \in [0, N-2M]$ аналогично выполняется:

$$P(B(k,k+2M) > N^c) \geq \frac{1}{8} N^{-c_1(b+\delta)} + o(N^{-2}).$$

Для фиксированного $k \in [0, N-2M]$ рассмотрим события:

$$Q = \{\exists i \in [0, M] : A_{k+i} - A_k \leq -c_1 \ln N; \text{ и } A_{2M} - A_k \geq 0\}$$

$$Q_1 = \{\exists i \in [0, M] : A_{k+i} - A_k \leq -c_1 \ln N\}$$

$$Q_2 = \{\exists i \in [0, M] : A_{k+i} - A_k \leq -\omega M\}$$

$$Q_3 = \{A_{k+2M} - A_{k+M} \leq \omega M\}$$

Так, как и для (12) имеем

$$P(Q) \geq N^{-c_1(b+\delta)} + o(N^{-2})$$

Теперь предположим, что событие Q совершилось и пусть $i \in [0, M]$ номер одного из индексов, удовлетворяющих неравенству: $A_{k+i} - A_k < -c_1 \ln N$. Заметим, что из соотношения (3) следует, что следующие события независимы:

$$J_1 = \{r_i \in [1/2; 1]\}, \qquad J_2 = \{z_{k+2M} - z_k \geq \frac{r_{k+i} d_{k+i}}{e^{A_{k+i}}}\}$$

J_2 может быть переписано следующим образом:
$J_2 = \{e^{A_k}(z_{k+2M} - z_k) \geq \frac{r_{k+i} d_{k+i}}{e^{A_{k+i} - A_k}}\}$

$$P\left(e^{A_k}(z_{k+2M} - z_k) \geq \frac{d_{k+i}}{2e^{A_{k+i} - A_k}}\right) \geq P(J_1)P(J_2) = 1/4 \cdot 1/2 = 1/8$$

Т.к. $B(k,n) = \frac{e^{A_n + A_k}|z_n - z_k|}{d_n e^{A_k} + d_k e^{A_n}}$ и при достаточно больших M для любого k выполняется неравенство: $\frac{e^{A_n}}{d_n e^{A_k} + d_k e^{A_n}} \geq \frac{1}{2d_k}$, то

$$P\left(B(k,k+2M) > \frac{1}{4}\frac{d_{k+M}}{d_k} N^{c_1}\right) \geq P\left(B(k,k+2M) > \frac{1}{4}\frac{d_{k+i}}{d_k} N^{c_1}\right)$$
$$\geq \frac{1}{8} P(I) = \frac{1}{8} N^{-c_1(b+\delta)} + o(N^{-2}).$$

Заметим, что для достаточно больших N выполняется:

$$\frac{1}{4}\frac{d_{k+M}}{d_k}N^{c_1} > N^c.$$

Таким образом, для фиксированного $k \in [0, N-2M]$ имеем:

$$P(B(k, k+2M) > N^c) \geq \frac{1}{8}N^{-c_1(b+\delta)} + o(N^{-2}).$$

Заметим, что события в выражении

$$P(B(k, k+2M) > N^c) \geq \frac{1}{8}N^{-c_1(b+\delta)} + o(N^{-2})$$

для

$$k = 0, 2M, 2 \cdot 2M, ..., ([N/(2M)] - 1) \cdot 2M$$

независимы, и следовательно:

$$P(\exists k \in [0, N-2M] : B(k, k+2M) > N^c) \geq$$
$$\geq 1 - \left(1 - \left(\frac{1}{8}N^{-c_1(b+\delta)} + o(N^{-2})\right)\right)^{[N/(2M)]} \quad (13)$$

Используя (7), мы получаем:
$\left(\frac{1}{8}N^{-c_1(b+\delta)} + o(N^{-2})\right)[N/(2M)] \geq \left(\frac{1}{8}N^{-c_1(b+\delta)} + o(N^{-2})\right)\left(\frac{N}{q\ln N} - 1\right)$

$$= \frac{1}{16q\ln N}N^{1-c_1(b+\delta)} + o(1) \longrightarrow \infty$$

и следовательно:

$$\left(1 - \left(\frac{1}{8}N^{-c_1(b+\delta)} + o(1)\right)\right)^{[N/(2M)]} \longrightarrow 0 \quad (14)$$

Из (13), (14) получаем:

$$P(K(\{A_i\}_{i\in[0,N]}, \{r_i\}_{i\in[0,N]}) > N^c) \longrightarrow 1$$

Следовательно,

$$\lim_{N\to\infty} s(N, N^c) = 0$$

□

Доказательство. (Доказательство $S2$)
Возьмём $M = \ln^2 N$.
Пусть $c > \frac{1}{b}$. Выберем $c_1 \in (1/b, c)$ и $\delta > 0$, удовлетворяющие неравенству $c_1(b-\delta) > 1$.
Согласно (3) последовательность $\{z_i\}$ определяется по

$z_{i+1} = z_i + \frac{r_{i+1}d_{i+1}}{e^{A_{i+1}}}$. Тогда для $n > k$ выполняется:

$$e^{A_k}|z_n - z_k| \leq \sum_{i=k+1}^{n} e^{-(A_i - A_k)} d_i$$

и

$$\frac{e^{A_n}}{d_n e^{A_k} + d_k e^{A_n}} = \frac{1}{d_k} \cdot \frac{e^{A_n}\frac{d_k}{d_n}}{e^{A_k} + e^{A_n}\frac{d_k}{d_n}} \leq \frac{1}{d_k}.$$

Значит, $\forall k, n$:
$B(k,n) = \frac{e^{A_n + A_k}|z_n - z_k|}{d_n e^{A_k} + d_k e^{A_n}} \leq \frac{1}{d_k} \cdot \sum\limits_{i=k+1}^{n} e^{-(A_i - A_k)} d_i = \sum\limits_{i=k+1}^{n} e^{-(A_i - A_k)} \frac{d_i}{d_k}$.

Тогда:

$$K(\{A_i\}, \{r_i\}) = \max_{0 \leq k < n \leq N} B(k,n) \leq \max_{0 \leq k < n \leq N} \sum_{i=k+1}^{n} e^{-(A_i - A_k)} \frac{d_i}{d_k} \leq$$

$$\leq \max_{0 \leq k \leq N} \sum_{i=k+1}^{N} e^{-(A_i - A_k)} \frac{d_i}{d_k} =: D(\{A_i\}) \quad (15)$$

Верно следующее:

$$P\left(D(\{A_i\}) < N^c\right) = 1 - P\left(\exists k \in [0, N] : \sum_{i=k+1}^{N} \frac{e^{-(A_i - A_k)} d_i}{d_k} \geq N^c\right) \geq$$

$$1 - NP\left(\sum_{i=0}^{N} e^{-(A_i - A_0)} \geq N^c\right)$$

Заметим, что если $\sum\limits_{i=0}^{N} e^{-(A_i - A_0)} > N^c$, то выполняется одно из следующих неравенств:

$$\exists i \in [0, M] : e^{-A_i} > \frac{N^c}{2M}$$

$$\exists i \in [M, N] : e^{-A_i} > \frac{N^{c-1}}{2}$$

Заметим, что для достаточно больших N выполняется:

$$\frac{N^c}{2M} > N^{c_1}, \quad N^{c-1}/2 > e^{-\omega M},$$

и, следовательно (также, как в S1), для достаточно больших N выполняется:

$P\left(\sum\limits_{i=0}^{N} e^{-(A_i - A_0)} > N^c\right) \leq P(\exists i \in [0, M] : A_i < -c_1 \ln N) + P(\exists i \in [M, N] : A_i < \omega M) \leq e^{-(b-\delta)c_1 \ln N} + o(N^{-2}) = N^{-(b-\delta)c_1} + o(N^{-2})$.

Наконец,

$$P(D(\{A_i\}) \leq N^c) \geq 1 - N(N^{-(b-\delta)c_1} + o(N^{-2})) \xrightarrow{N \to \infty} 1$$

и, следовательно, из соотношения (15) следует:

$$\lim_{N \to \infty} s(N, N^c) = 1$$

$\square$

Доказательство. (Доказательство (S1'))

Обозначим $v' := (a_0 + \theta_2 + a_1 + \theta_2)/2 > 0$ и $\omega' := v'/2$.

Положим $M = \ln^2 N$. Предположим, что $c < \frac{1}{b'}$. Выберем $c_1 \in (c, \frac{1}{b'})$ и $\delta > 0$ такие, что

$$c_1(b' + \delta) < 1. \tag{16}$$

Рассмотрим следующие события:

$$I = \{\exists i \in [0, M] : A_i + i\theta_2 \leq -c_1 \ln N; \text{ и } A_{2M} + 2M\theta_2 \geq 0\}$$

$$I_1 = \{\exists i \in [0, M] : A_i + i\theta_2 \leq -c_1 \ln N\}$$

$$I_2 = \{\exists i \in [0, M] : A_i + i\theta_2 \leq -\omega' M\}$$

$$I_3 = \{A_{2M} - A_M + M\theta_2 \leq \omega' M\}$$

Аналогично, как и в случае S1, верно следующее:

$$P(I) \geq P(I_1) - P(I_2) - P(I_3). \tag{17}$$

.

Оценим вероятности событий I_1, I_2, I_3 :

Используя Ruin Problem и Large deviation principle, получим:

$$P(I_1) \geq P(\exists i \geq 0 : A_i + i\theta_2 \leq -c_1 \ln N) - P(\exists i > M : A_i + i\theta_2 \leq -c_1 \ln N) \geq$$

$$\geq e^{-c_1 \ln N(b'+\delta)} - \sum_{i=M+1}^{\infty} P(A_i + i\theta_2 \leq 0) \quad \geq N^{-c_1(b'+\delta)} - \sum_{i=M+1}^{\infty} e^{-ih(v')}$$

$$\geq N^{-c_1(b'+\delta)} - \frac{1}{1 - e^{-h(v')}} e^{-(M+1)h(v')} \geq N^{-c_1(b'+\delta)} + o(N^{-2}). \tag{18}$$

Из Ruin problem получаем:

$$P(I_2) \leq P(\exists i \geq 0 : A_i + i\theta_2 \leq -\omega' M) \leq e^{-M\omega'(b-\delta)} = o(N^{-2}). \tag{19}$$

Из Large deviation principle следует:

$$P(I_3) \le e^{-M(h(\omega')-\delta)} = o(N^{-2}). \tag{20}$$

Из неравенств (17)- (20) получается:

$$P(I) \ge N^{-c_1(b'+\delta)} + o(N^{-2}). \tag{21}$$

Теперь предположим, что событие I совершилось и пусть $i \in [0, M]$ номер одного из индексов, удовлетворяющих неравенству: $A_i + i\theta_2 < -c_1 \ln N$. Заметим, что из соотношения (3) следует, что следующие события независимы:

$$J_1 = \{r_i \in [1/2; 1]\}, \qquad J_2 = \{z_{2M} - z_0 \ge \frac{r_i d_i}{e^{A_i}}\}$$

Т.к. из условия $d_i \ge \frac{1}{\alpha_2} e^{-i\theta_2}$, то

$$P\left(z_{2M} - z_0 \ge \frac{1}{2\alpha_2 e^{A_i + i\theta_2}}\right) \ge P\left(z_{2M} - z_0 \ge \frac{d_i}{2e^{A_i}}\right)$$
$$\ge P(J_1)P(J_2) = 1/4 \cdot 1/2 = 1/8.$$

Т.к. $B(0; 2M) = \frac{e^{A_{2M}} |z_{2M} - z_0|}{d_{2M} + e^{A_{2M}}}$ и при достаточно больших M выполняется неравенство $\frac{e^{A_{2M}}}{d_{2M} + e^{A_{2M}}} \ge \frac{1}{2}$, то

$$P(B(0; 2M) > \frac{N^{c_1}}{4\alpha_2}) \ge \frac{1}{8} P(I) = \frac{1}{8} N^{-c_1(b'+\delta)} + o(N^{-2}).$$

Заметим, что для достаточно больших N выполняется: $N^c < \frac{N^{c_1}}{4\alpha_2}$, и следовательно:

$$P(B(0, 2M) > N^c) \ge \frac{1}{8} N^{-c_1(b'+\delta)} + o(N^{-2}).$$

Для любого $k \in [0, N - 2M]$ аналогично выполняется:

$$P(B(k, k+2M) > N^c) \ge \frac{1}{8} N^{-c_1(b'+\delta)} + o(N^{-2}).$$

Заметим, что события в выражении

$$P(B(k, k+2M) > N^c) \ge \frac{1}{8} N^{-c_1(b'+\delta)} + o(N^{-2})$$

для

$$k = 0, 2M, 2 \cdot 2M, ..., ([N/(2M)] - 1) \cdot 2M$$

независимы, и следовательно:

$$P(\exists k \in [0, N-2M] : B(k, k+2M) > N^c) \geq$$
$$\geq 1 - \left(1 - \left(\frac{1}{8} N^{-c_1(b'+\delta)} + o(N^{-2})\right)\right)^{[N/(2M)]} \tag{22}$$

Используя (16), мы получаем:
$\left(\frac{1}{8} N^{-c_1(b'+\delta)} + o(N^{-2})\right) [N/(2M)] \geq \left(\frac{1}{8} N^{-c_1(b'+\delta)} + o(N^{-2})\right) \left(\frac{N}{\ln^2 N} - 1\right)$
$$= \frac{1}{16 \ln^2 N} N^{1-c_1(b'+\delta)} + o(1) \longrightarrow \infty$$
и следовательно:
$$\left(1 - \left(\frac{1}{8} N^{-c_1(b'+\delta)} + o(1)\right)\right)^{[N/(2M)]} \longrightarrow 0 \tag{23}$$

Из (22), (23) получаем:
$$P(K(\{A_i\}_{i \in [0,N]}, \{r_i\}_{i \in [0,N]}) > N^c) \longrightarrow 1$$

Следовательно,
$$\lim_{N \to \infty} s(N, N^c) = 0$$

□

Доказательство. (Доказательство $S2'$)
Обозначим $v'' := (a_0 + \theta_1 + a_1 + \theta_1)/2 > 0$ и $\omega'' := v''/2$.
Пусть $c > \frac{1}{b''}$. Выберем $c_1 \in (\frac{1}{b''}, c)$ и $\delta > 0$, удовлетворяющие неравенству $c_1(b'' - \delta) > 1$.
Возьмём $M = \ln^2 N$.
Согласно (3) последовательность $\{z_i\}$ определяется по
$z_{i+1} = z_i + \frac{r_{i+1} d_{i+1}}{e^{A_{i+1}}}$. Тогда для $n > k$ выполняется:
$$e^{A_k}(z_n - z_k) \leq \sum_{i=k+1}^{n} e^{-(A_i - A_k)} d_i$$
и
$$\frac{e^{A_n}}{d_n e^{A_k} + d_k e^{A_n}} = \frac{1}{d_k} \cdot \frac{e^{A_n} \frac{d_k}{d_n}}{e^{A_k} + e^{A_n} \frac{d_k}{d_n}} \leq \frac{1}{d_k}.$$
Значит, $\forall k, n :$
$B(k,n) = \frac{e^{A_n + A_k}|z_n - z_k|}{d_n e^{A_k} + d_k e^{A_n}} \leq \frac{1}{d_k} \cdot \sum\limits_{i=k+1}^{n} e^{-(A_i - A_k)} d_i = \sum\limits_{i=k+1}^{n} e^{-(A_i - A_k)} \frac{d_i}{d_k}.$

Тогда:

$$K(\{A_i\},\{r_i\}) = \max_{0\le k<n\le N} B(k,n) \le \max_{0\le k<n\le N} \sum_{i=k+1}^{n} e^{-(A_i-A_k)}\frac{d_i}{d_k} \le$$

$$\le \max_{0\le k\le N} \sum_{i=k+1}^{N} e^{-(A_i-A_k)}\frac{d_i}{d_k} =: D(\{A_i\}) \quad (24)$$

Верно следующее:

$$P\left(D(\{A_i\}) < N^c\right) = 1 - P\left(\exists k\in[0,N] : \sum_{i=k+1}^{N} \frac{e^{-(A_i-A_k)}d_i}{d_k} \ge N^c\right) =$$

$$= 1 - P\left(\exists k\in[0,N] : \sum_{i=k+1}^{N} \frac{e^{-(A_i-A_k)}d_{k+(i-k)}}{d_k} \ge N^c\right) \ge$$

$$\ge 1 - P\left(\exists k\in[0,N] : \sum_{i=k+1}^{N} e^{-(A_i+i\theta_1-A_k-k\theta_1)} \ge \alpha_1 N^c\right) \ge 1 - NP\left(\sum_{i=0}^{N} e^{-(A_i+i\theta_1)} \ge \alpha_1 N^c\right)$$

Заметим, что если $\sum\limits_{i=0}^{N} e^{-(A_i+i\theta_1)} > \alpha_1 N^c$, то выполняется одно из следующих неравенств:

$$\exists i\in[0,M] : e^{-A_i-i\theta_1} > \frac{\alpha_1}{2}\frac{N^c}{M}$$

$$\exists i\in[M,N] : e^{-A_i-i\theta_1} > \frac{\alpha_1}{2}N^{c-1}$$

Заметим, что для достаточно больших N выполняется:

$$\frac{\alpha_1}{2}\frac{N^c}{M} > N^{c_1}, \quad \alpha_1\frac{N^{c-1}}{2} > e^{-\omega'' M},$$

и, следовательно (также, как в S1), для достаточно больших N выполняется:

$P\left(\sum\limits_{i=0}^{N} e^{-(A_i+i\theta_1)} > \alpha_1 N^c\right) \le P(\exists i\in[0,M] : A_i+i\theta_1 < -c_1\ln N) + P(\exists i\in [M,N] : A_i+i\theta_1 < \omega'' M) \le e^{-(b''-\delta)c_1\ln N} + o(N^{-2}) = N^{-(b''-\delta)c_1} + o(N^{-2})$.

Наконец,

$$P(D(\{A_i\}) \le N^c) \ge 1 - N(N^{-(b''-\delta)c_1} + o(N^{-2})) \xrightarrow{N\to\infty} 1$$

и, следовательно, из соотношения (24) следует:

$$\lim_{N\to\infty} s(N,N^c) = 1.$$

$\square$

Список литературы

[1] Sergei Yu. Pilyugin, Kazuhiro Sakai. *Shadowing and Hyperbolicity*// Lecture Notes in Mathematics 2193. — 1994 — p. 2–5.

[2] Приезжев В. *Вероятностное отслеживание для убывающих погрешностей с переменной скоростью*, Выпускная квалификационная работа, СПбГУ, 2021.

[3] Tikhomirov S. *Shadowing in linear skew products.* J. Math. Sci. (N.Y.) 209 (2015), no. 6, 979–987.

[4] S. R. S. Varadhan. *Large deviations and applications.* CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics, 46. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 1984.

[5] W. Feller. *An introduction to probability theory and its applications. Vol. II.,* John Wiley & Sons, Inc., New York-London-Sydney, 1971.